

北京大学数学科学学院《数学分析I》期末试题(20220105)

授课教师: 王冠香

1. (10分) 求原点到曲线 $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ 上各点的法线的距离的最小值。
2. (10分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$;
3. (10分) 计算 $\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$;
4. (10分) 计算 $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} dx$.
5. (10分) 设函数 $y = y(x)$ 由 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 决定, 验证 $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$.
6. (10分) 设 $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$, 计算 $f^{(2020)}(0), f^{(2021)}(0)$.
7. (10分) 设 $f(x) \in C[a, b], f(x) \in D(a, b), (0 < a < b)$, 证明: $\exists \xi, \eta \in (a, b) s.t. 3(a + b)\xi^2 f'(\eta) = 2(a^2 + ab + b^2)\eta f'(\xi)$.
8. (10分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界且 $f'(x)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续, 证明 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界。
9. (10分) 证明: 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的有界凸函数是常数。
10. (10分)
 - (1) 设 $f(x)$ 于 $[0, 2]$ 二阶可导, $f''(1) > 0$. 证明: $\exists x_1, x_2 \in (0, 2) s.t. f'(1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1}$.
 - (2) 设 $f(x)$ 于 (a, b) 凸, 证明: $\forall x_0 \in (a, b), \exists \delta > 0, s.t. f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \delta]$ 和 $[x_0 - \delta, x_0]$ 都是单调的。