北京大学数学科学学院《数学分析I》期中试题（20211110）

授课教师：王冠香

1.（25分）判断下列陈述是否正确，并给出简要理由.

(1) 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，如果满足 $f(f(x))=x,\forall x\in\mathbb{R}$, 则 f 是一一对应的.

(2) 元素个数无穷的集合，若有确界，则确界必是集合的聚点.

(3) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{|x_n|\}$ 也收敛.

(4) $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$，若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 有界.

(5) 某区间上的两个一致连续的函数的乘积一致连续.

2.（25分）计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\ln(1-\frac{1}{k^2})$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{4x}$;

(5) 对 $p(\geqslant 2)$ 个正数 $a_1,\cdots,a_p$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{p}a_k^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

3.（10分）证明下列命题：

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=a$;

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=ab$.

4.（10分）设数列 $\{x_n\}$ 是一列两两不同的实数，试构造一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，是的它的间断点集恰好是 $\{x_n\}$，并解释为何 $f(x)=\begin{cases}1, & \exists n\, s.t. x=x_n\\ 0, & \nexists n\, s.t. x=x_n\end{cases}$ 不是该题的解。

5.（10分）设 $x_n>0, n=1,2,\cdots$, 记 $L=\overline{\lim}\, n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)$. (1) 证明 $L\geqslant 1$; (2) 是否存在收敛正数列 $\{x_n\}$ 使得 $L<+\infty$? 为什么？(3) 给出一个正数列 $\{x_n\}$ 使得 $L=1$.

6. （10分）(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，且对任意的 $x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. (2) 上一结论中，“ $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续”是否必要？如果不是必要的，给出无此条件的证明；如果是必要的，举出反例。

7. （10分）证明下列命题：

(1) 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，证明必存在两个子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{x_{n_{k+1}}\}_{k=1}^{\infty}$ 同时收敛；

(2) 利用“有界数列必有收敛子列”证明“闭区间上的连续函数是一致连续的.”