数学分析（I）2022-2023 秋季学期期中试题

1.(30 分)求序列或函数的极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}[\sin(\ln(n+1))-\sin(\ln n)]$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x\,sinx}-1}{\arctan x^2}$；(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\ln n)^a-n^a$，其中$0<a<1$. (5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2^{1/x}+8^{1/x}}{2})^x$.

2.(12 分)讨论下列函数的连续性，若有间断点，说明间断点类型（若为第一类间断点，需区分可去间断点和跳跃间断点）:

(1) $f(x)=[|\cos x|]$; (2) $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 。

3.(6 分)当$x\longrightarrow0$时，$e^{x^n}-1$是比$x\left(cos\sqrt{x}-1\right)(\sqrt[3]{x+1}-1)$低阶但比$\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$高阶的无穷小量，求正整数$n$。

4.(18 分)求下列函数的导数

(1) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},x>0$; (2) $f(x)=x^{x^{\sin x}},x>0$;

(3) 求由方程$y\sin x+e^{x-y}=1$所确定的隐函数y的导数$y'(0)$。

5.(7 分)已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$。证明$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$存在并求其值。

6.(7 分) 序列$\{x_n\}$满足$x_0=0$，$x_{2k}=\frac{x_{2k-1}}{2}$，$x_{2k+1}=x_{2k}+\frac{1}{2}$。求该序列的上下极限。

7.(7 分)假设$x_0=1$，$x_{n+1}=\frac{1}{{x_n}^3+4}$。 证明序列$\{x_n\}$收敛到方程$x^4+4x-1=0$的唯一正根。

8.(8 分)设方程$4\ln x-x^2+a-\ln 4=0$在$[\frac{1}{e},2]$中恰有两根，求a满足的条件。

9.(8 分)用闭区间套定理证明单调有界原理。

10.(7 分)设$f(x)$在$[1,+\infty)$上满足 Lipschitz 条件，即存在常数C，使得$\forall x,y\in[1,+\infty)$,有$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|$。证明：$\frac{f(x)}{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续。

答案:

1.（1）0；（2）$\frac{1}{3}$；（3）e^2；（4）$0<n^a[(1+\frac{\ln n}{n})^a-1]<\frac{\ln n^a}{n^{1-a}}$；（5）4。

2. （1）$x=n\pi$时可去间断点；(2) $x=0$为第二类间断点，$x=1$为跳跃间断点。

3. 1 或 2。

5. 2。

6. 证明：先证明$x_{2k}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}}$，$x_{2k+1}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$。则$\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n=1$，$\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n=\frac{1}{2}$

7. 证明：对函数$f(x)=\frac{1}{x^3+4}$用压缩映射原理。

8. $2<a\leq 4-2\ln 2$。

10.证明：先证明$\frac{f(x)}{x}$有界。然后再由$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right|=\frac{|f(x)-f(y)|}{x}+\frac{1}{x}\left|\frac{f(y)}{y}\right||x-y|$。