# 北京大学数学分析期中试题

2021年5月5日

1. （15分）讨论下列积分和级数的收敛性和绝对收敛性：

   (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx;$

   (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^p)\, dx;$

   (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \ln n}{n^p}.$

2. （15分）已知 $a_n > 0, \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$. 求证： $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 收敛。

3. （15分）试构造一个发散级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$，使得无穷乘积 $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ 收敛。

4. （15分）设 $f(x)$ 在任意有限区间上可积，且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$. 求证：

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|\sin nx|\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

5. （15分）设单调递增函数 $f(x) \in C^1[0, +\infty), f(0) > 0$. 已知积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x) + f'(x)}$ 收敛。求证：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ 收敛。

6. （15分）$f \in C[0, 1]$, 求证：$f(x)$ 可以被整系数多项式一致逼近当且仅当 $f(0), f(1)$ 为整数。

7. （10分）$f \in R[0, 2]$, 定义函数列 $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(x + \frac{k}{n}), x \in [0, 1]$. 求证：函数列 $\{S_n\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛，且 $S_n(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) \in R[0, 1]$.