

高数 B 2021-2022 春季学期期末试题

1. (10 分) 求函数

$$\frac{\sqrt{|x|}}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 - \sqrt{|x|}}$$

在 $x = 0$ 处的幂级数展开式, 并指出此幂级数的收敛域。

2. (15 分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上等于 e^x . 求 $f(x)$ 的傅里叶级数, 以及此傅里叶级数在 $x = \pi$ 处的收敛值。

3. (10 分) 求无穷积分 $\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx$ 的值, 和瑕积分 $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx$ 的值。

4. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$ 的收敛区间, 以及此幂级数的和函数。

5. (10 分) 任意给定常数 $r > 0$. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$ 在 $[r, +\infty)$ 上一致收敛。

6. (15 分) 求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x + 2n}$$

的收敛域, 绝对收敛点 x 的全体, 条件收敛点 x 的全体。

7. (15 分) 定义函数 $\theta: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 为

$$\theta(x) = \int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)} dt.$$

证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) dx$$

收敛。(注: 本题要求写出详细过程和根据。)

8. (15 分) 设 n 是正整数。

- (1) (5 分) 任给常数 $a > 0$. 证明含参变量 t 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} dx$$

在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛。

- (2) (10 分) 对于每个 $t \in (0, +\infty)$, 求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} dx$$

的值。