北京大学数学科学学院期中考试参考答案

2021 - 2022**学年第 1 学期**

考试科目 **高等数学C1**

姓　　名 ____________ **学　　号** ________________

本试题共 6 **道大题，满分** 100 **分**

请特别注意：在解答下面所有试题过程中，不可直接引用由主讲老师划定的教材中本次考试范围 之外的高等数学定理和公式。如果有争议，以主讲老师判定为准。

1.(15分) 基本计算题。

（1）(5分)． 求函数 $f(x)=x^{\sqrt{x}}$ ($x>0$) 的导函数 $f'(x)$.

（2）(5分)． 求 $\arcsin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{100}\right)$ 在点 $\frac{1}{2}$ 处的标准线性近似值。

（3）(5分)． 求曲线 $e^{(1-x)\,y} + 2xy = 5$ 在点 $(1,2)$ 处 的切线方程。

参考答案:

（1）． 用复合函数导数公式（链式法则）计算得

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\ln x+2)\ .$$

（2）． 用一阶微分公式计算得到此标准线性近似值是

$$\arcsin(\frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}\ \frac{1}{100} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{50\sqrt{3}}\ .$$

（3）．把 y 看做 x 的隐函数 $y=y(x)$， 在 $e^{(1-x)y} + 2xy = 5$ 的两边同时对 x 求导，得到

$$e^{(1-x)y}(1-x)\ y' + 2\,y + 2\,x\,y' = 0\ .$$

在点 $(1,2)$ 处，代入 $x=1$ 和 $y=2$ 得

$$0 + 4 + 2\,y'(1) = 0$$

推出

$$y'(1) = -2\ .$$

$y'(1)$ 是曲线在点 $(1,2)$ 处的切线的斜率。所以点 $(1,2)$ 处的切线方程是

$$y - 2 = y'(1)\ (x-1) = -2\,(x-1)$$

$$2x + y - 4 = 0\ .$$

2.(20分) 假设 $x_1>0$, 对于每个正整数 n 有

$$x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}\ .$$

证明 序列极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在， 并求出此极限的值。

参考答案:

（1）用 归纳法， 从条件 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$ 推出对于所有正整数 n 有 $x_n > 0$.

（2）

$$x_{n+1} - \sqrt{2} \ = \ \frac{2(1+x_n)}{2+x_n} - \sqrt{2}$$

$$= \ \frac{2 + 2x_n - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}x_n}{2+x_n} \ = \ \frac{2-\sqrt{2}}{2+x_n} \ (x_n - \sqrt{2}) \, .$$

（3）结合上面（1）和（2）得到

$$0 \le | \ x_{n+1} - \sqrt{2} \ | \ \le \ \frac{2-\sqrt{2}}{2} \ | \, x_n - \sqrt{2} \, | \, .$$

（4）对于所有正整数 n，反复使用（3）中不等式得到

$$0 \ \le \ | \ x_{n+1} - \sqrt{2} \ | \ \le \ (\frac{2-\sqrt{2}}{2})^n \ | \, x_1 - \sqrt{2} \, | \, .$$

（5）由 $|\frac{2-\sqrt{2}}{2}| < 1$ 得到

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2-\sqrt{2}}{2})^n \ = \ 0 \, .$$

（6）由上面（4）（5）和 夹逼定理 得到

$$\lim_{n\to\infty} | \, x_{n+1} - \sqrt{2} \, | \ = \ 0 \, .$$

此推出 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ = \ \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \ = \ \sqrt{2}$$

（注：本题也可以用其他证法。）

3.(15分) 求函数极限

$$\lim_{x\to 0} (\ \frac{1 + 2\sin^2 x}{cos(2x)} \ )^{\csc^2 x} \quad .$$

（注：在解答本题过程中，不可直接引用本次考试范围 之外的 教材第三章 第5节中的洛必达法则 和 第6节中的高阶泰勒公式。）

参考答案:

（1）

$$L \ = \ \lim_{x\to 0} (\ \frac{1 + 2\sin^2 x}{cos(2x)} \ )^{\csc^2 x} \ = \ \lim_{x\to 0} (\ \frac{1 + 2\sin^2 x}{1 - 2\sin^2 x} \ )^{\csc^2 x} \ = \ \lim_{x\to 0} (\ 1 + \frac{4\sin^2 x}{1 - 2\sin^2 x} \ )^{\csc^2 x}$$

（2）做变量代换

$$t \ = \ \frac{1 - 2\sin^2 x}{4 \ \sin^2 x}$$

推出

$$t \ (\ 4 \ \sin^2 x) \ = \ 1 - 2 \ \sin^2 x$$

$$\sin^2 x \, (4 \, t + 2) \ = \ 1$$

$$\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \ = \ 4\,t + 2$$

(3) 把上面（2）代入上面（1）得到

$$L \ = \ \lim_{t \to +\infty} (1 + \frac{1}{t})^{4\,t+2} \ = \ (\lim_{t \to +\infty} (1 + \frac{1}{t})^{t}\,)^4 \quad (\,1 + \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\,)^2 \ = \ e^4\,(\,1 + 0\,)^2$$

$$= \ e^4$$

4.(20分) 证明方程

$$\sin x \ - \ \sqrt{x+1} \ + \ \sqrt{x} \ = \ 0$$

有 无穷个 互不相等的 正 实数解。

参考答案:

（1）对于每个正整数 n，有

$$\sin(2n\pi) \ - \ \sqrt{2n\pi + 1} \ + \ \sqrt{2n\pi} \ = \ 0 - \sqrt{2n\pi + 1} \ + \ \sqrt{2n\pi} \ < \ 0$$

（2）

$$\lim_{x \to +\infty} (\,\sqrt{x+1} \ - \ \sqrt{x}\,) \ = \ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} \ + \ \sqrt{x}} \ = \ 0$$

所以存在 $A > 0$ 使得当 $x > A$ 时

$$0 \ < \ \sqrt{x+1} \ - \ \sqrt{x} \ < \ \frac{1}{2}$$

（3）当正整数 n 使得 $2n\pi + \frac{\pi}{2} > A > 0$ 时，上面（2）推出

$$\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \ - \ \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2} + 1} \ + \ \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$= \ 1 \ - \ \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2} + 1} \ + \ \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \ > \ 1 \ - \ \frac{1}{2} \ > \ 0$$

（4）当 $x > A > 0$ 时，$\sin x \ - \ \sqrt{x+1} \ + \ \sqrt{x}$ 是连续函数。根据上面（1）和（3）和连续函数“中间值定理”可以得到:
当 $2n\pi + \frac{\pi}{2} > A > 0$ 时，存在正实数 $x_n \in (\,2n\pi\,,\,2n\pi + \frac{\pi}{2}\,)$ 使得

$$\sin x_n \ - \ \sqrt{x_n + 1} \ + \ \sqrt{x_n} \ = \ 0\,.$$

（5）A 是有限数，所以有 **无穷个** 整数 n 使得 $2n\pi + \frac{\pi}{2} > A$. 对于不同的 **正** 整数 n，开区间 $(\,2n\pi\,,\,2n\pi + \frac{\pi}{2}\,)$ **互不相交** 。 所以

$$\sin x \ - \ \sqrt{x+1} \ + \ \sqrt{x} \ = \ 0$$

有 **无穷个 互不相等的 正**实数解 x_n .

5.(20分) 求出闭区间 $[-1,1]$ 上的一元函数

$$f(x) \;=\; x^{\frac{2}{3}} \;-\; (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$$

达到 最小值的 **所有** $[-1,1]$ 上的点。

参考答案:

（1） **连续** 函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$上 必达到 最小值 m 。因此

$$E \;=\; \{\; a \;\in\; [-1,1] \;|\; f(x)=m \;\}$$

是一个 **非空** 集合。 任取 $a \in E$ ， 则 或者 $f'(a)=0$， 或者 $f'(a)$ 不存在， 或者 a 是 $[-1,1]$ 的 边界点.

（2） 计算导数

$$f'(x) \;=\; \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} \;-\; \frac{2}{3}\,x\,(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}$$

（3）解

$$f'(x)=0$$
$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}$$
$$x^{-\frac{4}{3}} = (x^2-1)^{-\frac{2}{3}}$$
$$x^4 = (x^2-1)^2$$
$$x^2 = x^2-1\;(\text{不可能})\quad\text{或}\quad x^2 = 1-x^2$$
$$2x^2 = 1$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \;\geq\; 1 = f(0) = f(-1) = f(1)$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \;\geq\; 1 = f(0) = f(-1) = f(1)$$

（4） $f'(0)$ 不存在。 $f(0)=1$.

（5） 在 $[-1,1]$ 的 边界点上

$$f(-1)=1 \;\;,\;\; f(1)=1$$

（6） E 是一个 **非空** 集合， **直接比较** 上面（3）（4）（5）中函数 f 的值 推出：

$$E = \{-1\,,\;0\,,\;1\}$$

即， $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 达到最小值 1 的 **所有** $[-1,1]$ 上的点 是

$$-1\,,\;0\,,\;1$$

6.(10分) 证明：如果 $a(x)$ 和 $b(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上在每一点处都可导的函数，并且对于每点 $x\in(-\infty,\infty)$ 都有 $a'(x)\,b(x)\ -\ a(x)\,b'(x)\ \neq\ 0$ ，则 $a(x)$, $b(x)$ 的**零点彼此间隔**，严格地说就是：如果 $x_1<x_2$, $a(x_1)=0$, $a(x_2)=0$, 并且对于每个 $x\in(x_1,x_2)$ 有 $a(x)\neq 0$，则存在 $t\in(x_1,x_2)$ 使得 $b(t)=0$ ；对称地，如果 $y_1<y_2$, $b(y_1)=0$, $b(y_2)=0$, 并且对于每个 $y\in(y_1,y_2)$ 有 $b(y)\neq 0$，则存在 $s\in(y_1,y_2)$ 使得 $a(s)=0$.

参考答案:

（1） 设 $x_1<x_2$, $a(x_1)=0$, $a(x_2)=0$, 并且对于每个 $x\in(x_1,x_2)$ 有 $a(x)\neq 0$. 要证存在 $t\in(x_1,x_2)$ 使得 $b(t)=0$.

反证如下: 假设对于每个 $x\in(x_1,x_2)$ 有 $b(x)\neq 0$.

（2） 条件：对于每点 $x\in(-\infty,\infty)$ 都有 $a'(x)\,b(x)\ -\ a(x)\,b'(x)\ \neq\ 0$， 和上面 $a(x_1)=0$, $a(x_2)=0$ 推出 $b(x_1)\neq 0$, $b(x_2)\neq 0$. 因此可以定义 $[x_1,x_2]$ 上的函数

$$f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}\quad .$$

（3） 上面 $a(x_1)=0$ 推出

$$f(x_1)=\frac{a(x_1)}{b(x_1)}=\frac{0}{b(x_1)}=0$$

（4） 上面 $a(x_2)=0$ 推出

$$f(x_2)=\frac{a(x_2)}{b(x_2)}=\frac{0}{b(x_2)}=0$$

（5） 条件： $a(x)$ 和 $b(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上在每一点处都可导的函数， 推出它们是 $(-\infty,\infty)$ 上每一点都连续的函数， 推出：

（6） $[x_1,x_2]$ 上的函数 $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ 是连续函数，

（7） (x_1,x_2) 上的函数 $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ 是可导函数。

（8） 根据上面（3）（4）（6）（7），用罗尔定理推出：存在 $c\in(x_1,x_2)$ 使得

$$f'(c)=0$$

（9）

$$0\ =\ (\ \frac{a(x)}{b(x)}\ )'\ \Big|_{x=c}\ =\ \frac{a'(c)\,b(c)\ -\ a(c)\,b'(c)}{(b(c))^2}$$

此与条件： 对于每点 $x\in(-\infty,\infty)$ 都有 $a'(x)\,b(x)\ -\ a(x)\,b'(x)\ \neq\ 0$ 相矛盾。

因此 存在 $t\in(x_1,x_2)$ 使得 $b(t)=0$.

（10） 在本题中条件中， $a(x)$ 和 $b(x)$ 的地位是对称的，即把 $a(x)$ 和 $b(x)$ 互换，本题中条件仍然满足。因此也有：

如果 $y_1<y_2$, $b(y_1)=0$, $b(y_2)=0$, 并且对于每个 $y\in(y_1,y_2)$ 有 $b(y)\neq 0$，则存在 $s\in(y_1,y_2)$ 使得 $a(s)=0$.