PDE 读书报告

汪铃　2001110014

2021 年 6 月 19 日

第一章　轴对称流

这一章是研究轴对称流的正则性的。在第一节中首先讨论轴对称流的方程以及推导一些先验估计，然后在第二节中推导无涡情形下的轴对称解的全时正则性，之后在第三、四节中用两种不同的办法证明在无涡情形下没有I型奇性。在本报告中主要叙述De Giorgi-Nash-Moser迭代的相关内容，即第三节的内容。

§1.1　轴对称Navier-Stokes方程

在 $\mathbb{R}^3$ 中柱坐标 (r, θ, z) 定义为

$$(x_1, x_2, x_3) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

以及

$$e_r = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0\right), \quad e_\theta = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0\right), \quad e_z = (0, 0, 1).$$

于是，柱坐标系中的一个向量场 v 可以写成

$$v = v_r e_r + v_\theta e_\theta + v_z e_z, \tag{1.1}$$

其中 v_r, v_θ, v_z 是数值分量，记 v_θ 为涡分量。如果 $v_\theta = 0$ 则称 v 无涡。

我们称标量函数 φ 是轴对称的，如果 φ 在柱坐标系下不依赖于 θ ，即 $\varphi = \varphi(r, z, t)$. 一个向量场 v 称为轴对称的，如果(1.1) 中分量 v_r, v_θ, v_z 都不依赖于 θ.

对于Navier-Stokes方程

$$\begin{cases} \partial_t v - \nu\Delta v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p = f, & \text{in} \quad \Omega\times(0,T), \\ \operatorname{div} v = 0, & \text{in} \quad \Omega\times(0,T), \end{cases} \tag{1.2}$$

在轴对称向量场的情形下变为

$$\left(\partial_t + b\cdot\nabla - \Delta + \frac{1}{r^2}\right)v_r - \frac{1}{r}v_\theta^2 + \partial_r p = 0, \tag{1.3}$$

$$\left(\partial_t + b\cdot\nabla - \Delta + \frac{1}{r^2}\right)v_\theta + \frac{1}{r}v_r v_\theta = 0, \tag{1.4}$$

$$\left(\partial_t + b\cdot\nabla - \Delta\right)v_z + \partial_z p = 0, \tag{1.5}$$

$$\partial_r(r v_r) + \partial_z(r v_z) = 0, \tag{1.6}$$

其中 $p = p(r, z, t)$ 是轴对称的，且

$$b = v_r e_r + v_z e_z.$$

在上述方程组中我们可以将 Δ 替换为

$$\Delta_{\text{axisym}} = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2.$$

对于轴对称向量 v, 其涡度 $\omega = \operatorname{curl} v$ 为

$$\omega(x,t) = \omega_r e_r + \omega_\theta e_\theta + \omega_z e_z, \tag{1.7}$$

其中

$$\omega_r = -\partial_z v_\theta, \quad \omega_\theta = \partial_z v_r - \partial_r v_z, \quad \omega_z = (\partial_r + r^{-1})v_\theta.$$

于是涡度方程限制到轴对称类上为

$$\left(\partial_t + b\cdot\nabla - \Delta + \frac{1}{r^2}\right)\omega_r - \omega_r\partial_r v_r - \omega_z\partial_z v_r \quad = 0, \tag{1.8}$$

$$\left(\partial_t + b\cdot\nabla - \Delta + \frac{1}{r^2}\right)\omega_\theta - \frac{\partial_z v_\theta^2}{r} - \frac{v_r}{r}\omega_\theta \quad = 0, \tag{1.9}$$

$$\left(\partial_t + b\cdot\nabla - \Delta\right)\omega_z - \omega_r\partial_r v_z - \omega_z\partial_z v_z \quad = 0. \tag{1.10}$$

对于正则性问题，由部分正则性定理 $\mathcal{P}^1(S) = 0$ 知轴对称恰当弱解的奇性只可能出现在z轴。于是做变量替换 $\omega_\theta = r\Omega\,, v_\theta = r^{-1}\Gamma$, 得到

$$\left(\partial_t + b\cdot\nabla - \Delta + \frac{2}{r}\partial_r\right)\Gamma \quad = \quad 0, \tag{1.11}$$

$$\left(\partial_t + b\cdot\nabla - \Delta + \frac{2}{r}\partial_r\right)\Omega \quad = \quad r^{-2}\partial_z v_\theta^2. \tag{1.12}$$

接下来我们推导先验估计。对于弱解 v 我们总有能量估计

$$v \in L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^3)), \quad \nabla v \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+).$$

对于轴对称解我们还有如下结果:

引理1.1. 设 v 是(1.2)在 $\mathbb{R}^3\times[0,T)$中 不带外力项的轴对称 *Leray–Hopf* 弱解, 且对于任意 $t_1 \in (0,T)$ 有 $v \in L^\infty(0,t_1;L^3)$. 如果对于某个 $p \in [2,\infty]$, 有 $rv_\theta(0) \in L^p(\mathbb{R}^3)$, 则 $rv_\theta \in L^\infty(0,T;L^p)$ 以及若 $p < \infty$, 则 $|rv_\theta| \in L^2(0,T;W^{1,2})$.

特别地，当 $p = \infty$ 时，我们有

$$|v_\theta(r,z,t)| \leqslant \frac{C}{r} \quad (r > 0, z \in \mathbb{R}, 0 < t < T).$$

证明. 令 $\Gamma = rv_\theta$. 假设 $2 \leqslant p < \infty$ 以及 v 有足够好的正则性以及空间衰减性。对于 Γ 的方程(1.11)，用 $|\Gamma|^{p-2}\Gamma$ 做测试函数得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}|\Gamma|^p + \frac{4(p-1)}{p^2}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla|\Gamma|^{p/2}\right|^2 \\
&\quad = -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2}{pr}\partial_r|\Gamma|^p = -\frac{4\pi}{p}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \partial_r|\Gamma|^p\,drdz \\
&\quad = -\frac{4\pi}{p}\int_{\mathbb{R}}|\Gamma|^p|_{r=0}^\infty\,dz = 0.
\end{aligned}$$

因此

$$\max_t \int_{\mathbb{R}^3}|\Gamma(t)|^p + 2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla|\Gamma|^{p/2}\right|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^3}|\Gamma(0)|^p \tag{1.13}$$

以及 $\|rv_\theta(t)\|_{L^p} \leqslant \|rv_\theta(0)\|_{L^p}$. 令 $p \to \infty$ 得到 $\|rv_\theta(t)\|_{L^\infty} \leqslant \|rv_\theta(0)\|_{L^\infty}$.

注意到满足先验估计(1.13)的解可以通过Galerkin方法构造得到，于是由弱强唯一性知其必与 v 相等，所以假设 v 的正则性和衰减性合理。 □

我们现在总结一些解的存在性定理，为接下来的内容做准备。

引理1.2. *设 $k \in \mathbb{N}, f \in L^2(0,\infty;H^{k-1}(\mathbb{R}^3))$, 以及 $v_0 \in H^k(\mathbb{R}^3), \operatorname{div} v_0 = 0$. 对于Stokes系统，$\forall T \in (0,\infty)$, 存在唯一的解 (v,p) 满足*

$$v \in L^\infty(0,T;H^k(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0,T;H^{k+1}(\mathbb{R}^3)), \partial_t v \in L^2(0,T;H^{k-1}(\mathbb{R}^3)).$$

引理1.3. *设 $f \in L^2(0,\infty;H^1(\mathbb{R}^3))$ 以及 $v_0 \in H^2(\mathbb{R}^3), \operatorname{div} v_0 = 0$. 对于Navier-Stokes方程(1.2)，存在 $T \in (0,\infty)$ 以及唯一解 (v,p) 满足*

$$v \in L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^3)), \partial_t v \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^3)).$$

其中 $T \geqslant C(\|v_0\|_{H^2} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^1)})^{-2}$. 记 $T_{\max}$ 是这样的 T 的上确界。如果 $T_{\max} < \infty$, 则 $v \notin L^\infty(0,T_{\max};H^1)$.

注意到唯一性保证了如果 v_0 是轴对称的，那么 v 也是轴对称的。

§1.2 无涡的情形

引理1.4. *对于满足 $v_\theta = 0$ 的轴对称向量场 v , $\omega = \operatorname{curl} v = \omega_\theta e_\theta$ 以及 $1 < p < \infty$ 有*

$$\|Dv\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \sim \|\omega_\theta\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, \quad \|D^2 v\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \sim \|\nabla\omega_\theta\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\omega_\theta}{r}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

其中 $D = (\partial_1,\partial_2,\partial_3)$ 以及 $\nabla = (\partial_r,\partial_z)$.

证明. 注意到 $Dv = D(-\Delta)^{-1}\operatorname{curl}\omega$. 因此

$$\|Dv\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \sim \|\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, \quad \|D^2 v\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \sim \|D\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

当 $v_\theta = 0$ 时，我们有 $\omega = \omega_\theta e_\theta$, 所以得到

$$|\omega| = |\omega_\theta|, \ |D\omega| \sim |\nabla\omega_\theta| + \frac{1}{r}|\omega_\theta|.$$

由此引理得证。 □

引理1.5. 如果 $v_0 \in L^2_\sigma \cap L^3_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 是轴对称的且满足 $v_{0,\theta} = 0$, 则不带压力项且满足 $v_\theta = 0$ 的方程(1.2)存在一个全时轴对称的 $Leray-Hopf$ 弱解 $v(t)$, 以及对任意 $0 < t_1 < \infty$ 有

$$v \in L^\infty(t_1, \infty; H^2) \cap L^2(t_1, \infty; H^3), \quad \partial_t v \in L^2(t_1, \infty; H^1).$$

且上述解在 $Leray-Hopf$ 弱解类中是唯一的。

§1.3 I型奇性: De Giorgi-Nash-Moser方法

在本节我们将说明轴对称流不存在I型奇性。首先回顾一下，对于方程(1.2)的解 $v(x,t)$ 在点 $(x,t) = (0,0)$ 处的I型奇性满足伸缩不变的爆破速率

$$|v(x,t)| \sim \frac{C}{|x| + \sqrt{-t}}, \quad C = O(1). \tag{1.14}$$

对于轴对称流，还存在其它的弱于(1.14)的伸缩不变界，例如

$$|v(x,t)| \leqslant \begin{cases} C_*(r^2 - t)^{-1/2} & \text{or} \\ C_* r^{-1} & \text{or} \\ C_*(-t)^{-1/2}. \end{cases} \tag{1.15}$$

定理1.6. 设 (v,p) 是*Navier Stokes*方程(1.2)在 $D = \mathbb{R}^3 \times (-T_0, 0)$ 中的一个轴对称弱解，满足 $v(T_0) = v_0 \in L^2_\sigma \cap L^3(\mathbb{R}^3), r v_{0,\theta} \in L^\infty(\mathbb{R}^3), p \in L^{5/3}(D)$, 且对于某个 $0 \leqslant \epsilon \leqslant 1/2$, 有

$$|v(x,t)| \leqslant \frac{C_*}{r^{1-2\epsilon}(-t)^\epsilon}, \quad (x,t) \in D. \tag{1.16}$$

其中 C_* 可以很大。则对于任意 $R > 0$ 有 $v \in L^\infty(B_R \times [-T_0, 0])$.

伸缩不变条件(1.16)包含了(1.15)的所有情形。这个定理首先在[2]假设 $|v| \leqslant C_*(r^2-t)^{1/2}$ 被证明了。然后分别在[3]和[4]中被独立的推广到其它情形。

在本节以及之后的内容中，我们将给出假设 $|v| \leqslant C_*/r$ 情形下的证明。本节中我们将叙述[2]和[3]中使用De Giorgi-Nash-Moser迭代的方法，下一节中呈现[4]中使用Liouville定理的办法。

第一种方法的主要想法如下。我们假设当 $t<0$ 时，v 是正则的。对于 $t \in (-T_0,0)$, 涡分量通过 Γ 的方程(1.11)可以获得少量的正则性：对于某个比较小的数 $\alpha=\alpha(C_*)>0$, 通过(1.16)可以得到

$$|v_\theta(t,r,z)| \leqslant Cr^{\alpha-1}. \tag{1.17}$$

(1.17)蕴含着Hölder连续性。对于经典的抛物型偏微分方程

$$\partial_t u = \partial_i(a_{ij}(x,t)\partial_j u)$$

其中 a_{ij} 是一致椭圆的可测函数，可以允许其不连续，由De Giorgi-Nash-Moser迭代的方法可以得到 u 的有界性估计和Hölder连续性。我们的系统(1.11)-(1.12)将注意力从高阶项的不连续系数转移到了低阶项。

为了得到(1.17)我们证明如下定理。

定理1.7. *假设 $\Gamma(x,t)$ 是方程(1.11)在 Q_2 中带有光滑函数 $b(x,t)$ 的有界光滑解，在 Q_2 中满足*

$$\Gamma|_{r=0}=0, \operatorname{div} b=0, |b| \leqslant C_*/r.$$

则存在只依赖于 C_* 的常数 C 和 α 使得

$$|\Gamma(x,t)| \leqslant C\|\Gamma\|_{L^\infty_{t,x}(Q_2)} r^\alpha, \quad \forall\,(x,t)\in Q_1. \tag{1.18}$$

证明. 证明分为如下几个步骤。

步骤1. 重新叙述 设 $X=(x,t)$. 定义原点处的抛物柱面

$$Q(R,\tau)=\{X:|x|<R, -\tau R^2<t<0\}.$$

其中 $R>0$ 以及 $\tau\in(0,1]$. 定义 $Q_R=Q(R)=Q(R,1)$. 对于固定的 $0<R<1$, 令

$$m_2=\inf_{Q_{2R}}\Gamma, M_2=\sup_{Q_{2R}}\Gamma, M=M_2-m_2>0.$$

注意到由 $\Gamma|_{r=0}=0$ 可得 $m_2\leqslant 0\leqslant M_2$. 定义

$$u=\begin{cases} 2(\Gamma-m_2)/M, & -m_2>M_2, \\ 2(M_2-\Gamma)/M, & \text{其它}. \end{cases} \tag{1.19}$$

在两种情形下都有 u 满足(1.11)以及在 Q_{2R} 中有 $0 \leqslant u \leqslant 2$ 且

$$a = u|_{r=0} \geqslant 1. \tag{1.20}$$

我们想通过(1.20)证明对于足够小的不依赖于 u, R 的常数 $c, \delta > 0$ 有 $\inf_{Q_{cR}} u > \delta$ 成立。这就蕴含着振幅估计(1.33)，由此通过迭代便可得到(1.18).

步骤2. 能量估计 定义 $v_\pm = (u-k)_\pm, k \geqslant 0$. 考虑径向对称测试函数 $0 \leqslant \zeta(x,t) \leqslant 1$ 满足在 $\partial B_R \times [-R^2, 0]$ 上有 $\zeta = 0$ 以及 $\frac{\partial \zeta}{\partial r} \leqslant 0$. 我们用检验函数 $\zeta^2 v_\pm$ 在 $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ 对(1.11)积分得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^3} |\zeta v_\pm|^2\right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\zeta v_\pm)|^2 \\ &\quad = \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\pm^2 \left(b\zeta \cdot \nabla\zeta + \zeta\frac{\partial \zeta}{\partial t} + |\nabla \zeta|^2 + \frac{2\zeta}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) \\ &\quad\quad + 2\pi[(a-k)_\pm]^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} dz \zeta^2|_{r=0}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

为了控制带有 b 的项，我们首先使用Young不等式得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} v_\pm^2 b\zeta \cdot \nabla\zeta &= R^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} v_\pm^2 \zeta^2 Rb \frac{R\nabla\zeta}{\zeta} \\ &\leqslant R^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} v_\pm^2 \zeta^2 \delta |Rb|^{1+\epsilon} + R^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} v_\pm^2 \zeta^2 C_\delta \left(\frac{R\nabla\zeta}{\zeta}\right)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

上式将 b 和 $|\nabla\zeta|/\zeta$ 的奇性分离了。然后我们选取 $0 < \epsilon < 1/3$ 使得 $\|(Rb)^{1+\epsilon}\|_{L^{3/2}(B_R)} \lesssim R^2$, 以及选取 ζ 使得当 n 足够大时其在靠近 ∂B_R 的渐近性为 $(1 - |x|/R)^n$, 则 $R|\nabla\zeta|/\zeta \lesssim \zeta^{-1/n}$. 由Hölder不等式和Sobolev不等式以及选取 δ 足够小得

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_\pm^2 b\zeta \cdot \nabla\zeta \leqslant \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(v_\pm \zeta)|^2 + CR^{-2}\int_{B_R} v_\pm^2. \tag{1.23}$$

选取 $\sigma \in (1/4, 1)$ 以及要求在 $Q(\sigma R, \tau)$ 上 $\zeta \equiv 1$, 再要求 $\zeta(x, -\tau R^2) = 0$, 于是利用(1.23)我们估计(1.21)

$$\begin{aligned} &\sup_{-\tau\sigma^2 R^2 < t < 0} \int_{B(\sigma R)\times\{t\}} v_\pm^2 + \int_{Q(\sigma R, \tau)} |\nabla v_\pm|^2 \\ &\quad \leqslant \frac{C_{**}}{\tau(1-\sigma)^2 R^2} \int_{Q(R,\tau)} v_\pm^2 + C\tau R^3 \left[(a-k)_\pm\right]^2. \end{aligned} \tag{1.24}$$

如果我们选取 $\zeta = \zeta(x)$, 则(1.21)变为

$$\begin{aligned} &\sup_{t_0 < s < t} \int_{B(\sigma R)\times\{s\}} v_\pm^2 + \int_{t_0}^t \int_{B(\sigma R)} |\nabla v_\pm|^2 - \int_{B_R \times \{t_0\}} v_\pm^2 \\ &\quad \leqslant \frac{C_{**}}{(1-\sigma)^2 R^2} \int_{t_0}^t \int_{B_R} v_\pm^2 + C\tau R^3 \left[(a-k)_\pm\right]^2. \end{aligned} \tag{1.25}$$

注意到和(1.24)相比在(1.25)中没有 τ^{-1}. 能量估计(1.24)和(1.25)除去最后一项是标准的抛物型De Giorgi类，注意到对于 v_- 来说最后一项当 $0 \leqslant k \leqslant 1$ 时为零。

步骤3. 水平集的Lebesgue测度的时间连续性

引理1.8. *假设存在* $t_0 \in [-\tau R^2, 0], K \in (0,1), \gamma \in (0,1)$ *使得*

$$|\{x \in B_R : u(x,t_0) \leqslant K\}| \leqslant \gamma |B_R|.$$

进一步假设 u *满足对于* v_-*的* (1.25)*。则对于所有* $\eta \in (0, 1-\sqrt{\gamma}), \mu \in (\gamma/(1-\eta)^2, 1)$*，存在* $\theta \in (0,1)$ *使得*

$$|\{x \in B_R : u(x,t) \leqslant \eta K\}| \leqslant \mu |B_R|, \quad \forall\, t \in [t_0, t_0 + (\tau \wedge \theta) R^2].$$

只需要取 $\theta > 0$ *使得对于足够靠近1的某个* $\sigma < 1$ *有*

$$(1-\eta)^{-2}\left(\gamma + \frac{C_{**}(\tau \wedge \theta)}{(1-\sigma)^2}\right) + (1-\sigma^3) \leqslant \mu, \tag{1.26}$$

其中 C_{**} *是*(1.25)*中的常数。*

步骤4. 时间片上小值子集的任意小密度

引理1.9. *假设* $u(x,t)$ *满足对于* v_- *的*(1.24)*，以及*

$$|\{x \in B_R : u(x,t) \leqslant K\}| \leqslant \gamma |B_R|, \quad \forall\, [t_0, t_0 + \theta R^2] = I,$$

其中 $\theta > 0, K, \gamma \in (0,1), B_R \times I \subset Q(R,\tau)$. *则对于所有的* $\epsilon \in (0,1)$ *存在* $\delta \in (0,1)$ *使得*

$$|\{X \in B_R \times I : u(X) \leqslant \delta\}| \leqslant \epsilon |B_R \times I|.$$

证明. 对于 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, 记

$$A_n(t) = \{x \in B_R : u(x,t) \leqslant 2^{-n} K\}, \quad A_n = \{(x,t) : t \in I, x \in A_n(t)\}.$$

对于任意的 $v \in W^{1,1}(B_R)$ 以及 $\alpha < \beta$ 有

$$|\{x \in B_R : v(x) \leqslant \alpha\}| \leqslant \frac{CR^{3+1}/(\beta-\alpha)}{|\{x \in B_R : v(x) > \beta\}|} \int_{B_R \cap \{\alpha < v \leqslant \beta\}} |\nabla v|,$$

我们得到

$$\begin{aligned} |A_{n+1}(t)| &\leqslant \frac{C2^{n+1}R}{K(1-\gamma)} \int_{A_n(t)-A_{n+1}(t)} |\nabla u| \\ &= \frac{C2^{n+1}R}{K(1-\gamma)} \int_{A_n(t)-A_{n+1}(t)} |\nabla (u-\beta)_-| \end{aligned}$$

其中 $\beta=2^{-n}K$. 对时间积分，由Cauchy-Schwarz不等式以及(1.24)得

$$|A_{n+1}|\leqslant\frac{CR^{5/2}}{R(1-\gamma)}|A_n-A_{n+1}|^{1/2}. \tag{1.27}$$

记 $p_n=\frac{|A_n|}{|B_R\times I|}$. 由(1.27)得到

$$p_n^2\leqslant C_1\left(p_{n-1}-p_n\right),\quad C_1=\frac{C}{\theta K^2(1-\gamma)^2}$$
$$np_n^2\leqslant\sum_{j=1}^n p_j^2\leqslant\sum_{j=1}^n C_1\left(p_{j-1}-p_j\right)=C_1\left(p_0-p_n\right)\leqslant C_1.$$

因此选择足够大的n便完成了证明。 □

步骤5. 小值集合的密度小于1

引理1.10. 设 $0\leqslant\tau\leqslant 1/8$. 存在 $\kappa\in(0,1)$ 使得 $0<\lambda<\kappa\tau$ 蕴含着

$$|\{X\in Q(R,\tau):u(X)\leqslant\lambda^2\}|\leqslant(1-4\lambda)|Q(R,\tau)|.$$

假设不对，则

$$|\{X\in Q(R,\tau):u(X)>\lambda^2\}|<4\lambda|Q(R,\tau)|. \tag{1.28}$$

用测试函数 $(u+\epsilon)^{-1/2}\zeta^2$ 作用在(1.11)上,然后令 $\epsilon\downarrow 0$ 可以得到 a 的一个上界与对于足够小的 κ 有 $a\geqslant 1$ 矛盾。

步骤6. 靠近0的小值子集任意小密度 首先我们有引理1.10，其中 $\tau\in(0,1/8)$ 待定，由此得存在 $t_1\in[-\tau R^2,-2\lambda\tau R^2]$ 使得

$$|\{x\in B_R:u(x,t_1)\leqslant\lambda^2\}|\leqslant(1-2\lambda)|B_R|. \tag{1.29}$$

在引理1.8中取 $K=\lambda^2,\gamma=1-2\lambda,\eta=\lambda,\mu=1-\lambda^2$ 应用到(1.29)得

$$|\{x\in B_R:u(x,t)\leqslant\lambda^3\}|\leqslant(1-\lambda^2)|B_R|,\quad\forall\, t\in[t_1,t_1+\theta_*R^2]\equiv I_*.$$

其中 $\theta_*=\theta\wedge\lambda\tau$ 以及 θ 是引理1.8中确定的常数。由此以及引理1.9得

$$|\{X\in B_R\times I_*:u(X)\leqslant\delta_*\}|\leqslant\frac{\epsilon_*}{2}|B_R\times I_*|,$$

其中 $\epsilon_*>0$ 足够小以及 $\delta_*=\delta(\epsilon_*)$.

然后，类似于(1.29)，存在 $t_2\in I_*$（满足 $t_2\leqslant-\lambda\tau R^2$ ）使得

$$|\{x\in B_R:u(x,t_2)\leqslant\delta_*\}|\leqslant\epsilon_*|B_R|. \tag{1.30}$$

到目前为止，我们选取的小参数都是依赖于 τ 的，但是在上式中，ϵ_* 可以选取得任意小使得其不依赖于 τ 的大小。

现在，我们首先选取 $1-\sigma^3=1/4$ 以及 $\tau<1/8$ 使得 $C_{**}\tau/(1-\tau)^2\leqslant 1/4$. 然后从(1.30)中取 δ_* 满足 $\epsilon_*<1/16$. 再选取 $\eta<1/4$. 由此以及引理1.8我们可以选取 $\mu<1$ 使得 $\theta=\tau$ 满足(1.26)以及

$$|\{x\in B_R: u(x,t)\leqslant\eta\delta_*\}|\leqslant\mu|B_R|,\quad \forall\, t\in[t_2,t_2+\tau R^2]\supset[-\lambda\tau R^2,0].$$

最后，再次应用引理1.9得到

$$|\{X\in Q(R,\lambda\tau): u(X)\leqslant\delta\}|\leqslant\epsilon|Q(R,\lambda\tau)|,\tag{1.31}$$

其中 $\epsilon>0$ 任意小。

步骤7. 下界估计 令 $U=\delta-u$, 其中 δ 是(1.31)中的常数。显然 U 是方程(1.11)的解且有 $U|_{r=0}=\delta-a<0$. 我们在 $Q(2d)$ 上将(1.24)应用到 U 上得到

$$\begin{aligned}\sup_{-\sigma^2d^2<t<0}\int_{B(\sigma d)\times\{t\}}\left|(U-k)^+\right|^2+\int_{Q(\sigma d)}\left|\nabla(U-k)^+\right|^2\\ \leqslant\frac{C_{**}}{(1-\sigma)^2d^2}\int_{Q(d)}\left|(U-k)^+\right|^2.\end{aligned}$$

由经典的De Giorgi估计得

$$\sup_{Q(d/2)}(\delta-u)\leqslant\left(\frac{C}{|Q(d)|}\int_{Q(d)}\left|(\delta-u)^+\right|^2\right)^{1/2}.\tag{1.32}$$

令 $d=\sqrt{\lambda\tau}R$ 使得 $Q(d)\subset Q(R,\lambda\tau)$. 由(1.32)和(1.31)得

$$\delta-\inf_{Q(d/2)}u\leqslant\left(\frac{C\delta^2\epsilon|Q(R,\lambda\tau)|}{|Q(d)|}\right)^{1/2}=C\delta\epsilon^{1/2}(\lambda\tau)^{-3/4},$$

当 ϵ 足够小时上式小于 $\frac{\delta}{2}$. 由此得到 $\inf_{Q(d/2)}u\geqslant\frac{d}{2}$. 所以有

$$\operatorname{osc}(\Gamma,d/2)\leqslant\left(1-\frac{\delta}{4}\right)\operatorname{osc}(\Gamma,2R).\tag{1.33}$$

步骤8. 迭代 迭代(1.33)得到

$$\operatorname{osc}(\Gamma,R)\leqslant C\|\Gamma\|_{L^\infty(Q_1)}R^\alpha,\tag{1.34}$$

其中 $\alpha=2\ln\left(1-\frac{\delta}{4}\right)/\ln(\lambda\tau/16)>0$.

对于属于 $Q(X_0,r),X_0=(0,z,t)$ 的任意一点 $X=(r,z,t)\in Q_1$, 在 $Q(X_0,1)$ 上将(1.34)应用到 Γ 上得到

$$|\Gamma(X)|\leqslant|\Gamma(X_0)|+\operatorname{osc}(\Gamma,Q(X_0,r))\leqslant 0+C\|\Gamma\|_{L^\infty(Q(2))}r^\alpha.$$

由此便证明了该定理。 □

接下来，在(1.16)中假设 $\epsilon=0$ ，我们用定理1.7来证明定理1.6。

假设$|v|\leqslant C_*/r$时定理1.6的证明. 假设 $T_0\geqslant 4$. 令 M 是 $|v|$ 小于一个固定时间 $t_1<0$ 的最大值。我们将推导 M 依赖于 C_* 不依赖于 t_1 的一个上界。不妨设 $M>1$. 定义

$$v^M(X,T)=M^{-1}v(X/M,T/M^2),\quad X=(X_1,X_2,Z).$$

对于 $x=(x_1,x_2,z)$ 以及 $X=(X_1,X_2,Z)$, 令 $r=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$ 以及 $R=\left(X_1^2+X_2^2\right)^{1/2}$. 当 $t\leqslant t_1$ 以及 $T\leqslant M^2t_1$ 时，对所有的 r 和 R 有下列估计：

$$|v(x,t)\leqslant C/r|,\quad |v^M(X,T)|\leqslant C/R,\quad |\nabla^k v^M|\leqslant C_k. \tag{1.35}$$

最后一个不等式来自于 $\|v^M\|_{L^\infty}\leqslant 1$ 和Navier-Stokes方程的正则性。其角分量 $v_\theta^M(R,Z)$ 满足 $v_\theta^M(0,Z)=0=\partial_Z v_\theta^M(0,Z)$. 由平均值定理和(1.35)得 $|v_\theta^M(R,z)|\leqslant CR, |\partial_Z v_\theta^M(R,Z)|\leqslant CR, R\leqslant 1$. 结合 $R\geqslant 1$的 (1.35)得到

$$\left|v_\theta^M\right|\leqslant C\min\left(R,R^{-1}\right),\quad \left|\partial_Z v_\theta^M\right|\leqslant C\min(R,1),\quad \forall R>0.$$

由定理1.7知，存在依赖于 C_* 的C和比较小的 $\alpha>0$ 使得在 Q_1 上 $\Gamma=rv_\theta$ 满足 $|\Gamma(r,z,t)|\leqslant Cr^\alpha$. 因此，对于 $R>0$ 有 $|v_\theta^M|\leqslant CR^{-1+\alpha}M^{-\alpha}$. 由这些估计我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\left|\partial_Z\left(v_\theta^M\right)^2(R)\right|}{R^2}&\leqslant\frac{C\min\left(R,R^{-1+\alpha}M^{-\alpha}\right)\cdot\min(R,1)}{R^2}\\&\leqslant\frac{C}{R^{3-\alpha}M^\alpha+1}.\end{aligned} \tag{1.36}$$

下面考虑伸缩之后涡的角分量。注意到 $\Omega=\omega_\theta/r$. 令

$$f=\Omega^M(X,T)=\Omega\left(X/M,T/M^2\right)M^{-3}=\omega_\theta^M(X,T)/R.$$

由(1.35)以及 $\omega_\theta^M|_{R=0}=0$ 知 ω_θ^M 和 $\nabla\omega_\theta^M$ 有界，所以得 $|f|\leqslant C(1+R)^{-1}$. 从 ω_θ 的方程可以得到

$$\left(\partial_T-L\right)f=g,\quad L=\Delta+\frac{2}{R}\partial_R-b^M\cdot\nabla_X,$$

其中 $g=R^{-2}\partial_Z(v_\theta^M)^2$ 以及 $b^M=v_r^Me_R+v_z^Me_Z$. 令 $P(T,X;S,Y)$ 表示 ∂_T-L 的卷积核。由Duhamel公式得

$$\begin{aligned}f(X,T)&=\int P(T,X;S,Y)f(Y,S)dY+\int_S^T\int P(T,X;\tau,Y)g(Y,\tau)dYd\tau\\&=:I+II.\end{aligned}$$

由Carlen和Loss[5],知核 P 满足 $P \geqslant 0, \int P(T,X;S,Y)dY = 1$, 然后利用 $\|b^M\| < 1$ 有

$$P(T,X;S,Y) \leqslant C(T-S)^{-3/2} e^{-h(|X_3-Y_3|,T-S)}, \quad h(a,\tau) = \frac{1}{4\tau}(a-\tau)_+^2.$$

由这些估计，坐标系 $Y = (R,Z)$ 以及Hölder不等式，我们对于 $T - S > 1$ 有

$$\begin{aligned} |I| &\leqslant \left[\int P(T,X;S,Y)|f(Y,S)|^3 dY\right]^{\frac{1}{3}} \\ &\leqslant \left[C(T-S)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-C\frac{|X_3-Y_3|}{T-S}} \frac{RdR}{(1+R)^3} dY_3\right]^{\frac{1}{3}} \leqslant C(T-S)^{-1/6}, \end{aligned} \tag{1.37}$$

和

$$\begin{aligned} |II| &\leqslant \int_S^T \left[\int P(T,X;S,Y)|g(Y,S)|^2 dY\right]^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leqslant C\int_0^{T-S} \left[\int \tau^{-3/2} e^{-C\frac{(a-\tau)_+^2}{\tau}} \frac{RdRda}{(R^{3-\alpha}M^\alpha + 1)^2}\right]^{1/2} d\tau \\ &\leqslant C\int_0^{T-S} \left[\left(\tau^{-1} + \tau^{-1/2}\right) M^{-\frac{2\alpha}{3-\alpha}}\right]^{1/2} d\tau \\ &\leqslant C(T-S)^{3/4} M^{-\frac{\alpha}{3}}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

结合这两个估计以及选取 $S = T - M^{\frac{4}{11}\alpha} > -T_0 M^2$, 我们得到 $|f(X,T)| \leqslant CM^{-\frac{2\alpha}{33}}$. 因此

$$\begin{aligned} |\omega_\theta(x,t)| &\leqslant \left|\omega_\theta^M\left(rM, zM, tM^2\right)\right| M^2 \\ &\leqslant \left|\Omega^M\left(rM, zM, tM^2\right)\right| M^2 rM \leqslant CM^{3-\frac{2\alpha}{33}} r. \end{aligned}$$

因此我们有

$$|\omega_\theta(x,t)| \leqslant CM^{2-\frac{\alpha}{33}}, \quad \forall\, r \leqslant M^{-1+\frac{\alpha}{33}}. \tag{1.39}$$

令 $b = v_r e_r + v_z e_z$ 以及 $B_\rho(x_0) = \{x : |x - x_0| < \rho\}$. 其满足 $-\Delta b = \omega_\theta \mathrm{e}_\theta$, 因此对于 $p > 1$ 有如下估计:

$$\sup_{B_\rho(x_0)} |b| \leqslant C\left(\rho^{-\frac{3}{p}} \|b\|_{L^p(B_{2\rho}(x_0))} + \rho \sup_{B_{2\rho}(x_0)} |\omega_\theta|\right).$$

令 $x_0 \in \{(r,\theta,z) : r < \rho\}$ 以及 $1 < p < 2$. 由假设 $|v| \leqslant C/r$, 有

$$\rho^{-\frac{3}{p}} \|b\|_{L^p(B_{2\rho}(x_0))} \leqslant C\rho^{-\frac{3}{p}} \|1/r\|_{L^p(B_{2\rho}(x_0))} \leqslant C\rho^{-1}.$$

因此对于 $\rho \leqslant M^{-1+\frac{\alpha}{99}}$ 有

$$\sup_{B_\rho(x_0)} |b| \leqslant C\left(\rho^{-1} + \rho^2 M^{3-\frac{2\alpha}{33}}\right) \leqslant CM^{1-\frac{2\alpha}{99}} \leqslant C\rho^{-1}.$$

所有这些估计以及下述事实

$$|v_\theta| = M\left|v_\theta^M\right| \leqslant MC\min\left(R, R^{-1+\alpha}M^{-\alpha}\right) \leqslant CM^{1-\frac{\alpha}{2-\alpha}}$$

蕴含着

$$|v(x,t)| \leqslant CM^{1-\frac{2\alpha}{99}}, \quad \text{for } r \leqslant M^{-1+\frac{2\alpha}{99}}.$$

另一方面，假设 $|v| \leqslant C/r$ 蕴含着 $|v| \leqslant CM^{1-\frac{2\alpha}{99}}, r \geqslant M^{-1+\frac{2\alpha}{99}}$. 因为 M 是 v 的最大值，所以得到其上界估计。 □

§1.4 I型奇性：Liouville定理的方法

在本节我们给出在假设 $|v| \leqslant \frac{C_*}{r}$ 下定理1.6的基于Liouville定理的另外一个证明。一个古代解是指定义在 $t \in (-\infty, 0)$ 上的解。

定理1.11 (Liouville定理)**.** 令 $D = \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$. 如果 $v(x,t) : D \to \mathbb{R}^3$ 是方程(1.2)不带压力项的轴对称解满足

$$|v| \leqslant \frac{C_*}{1+r}, \quad \forall x \in D,$$

则 $v \equiv 0$.

利用定理1.11的定理1.6的第二个证明. 假设对于所有的 $t_0 < 0$ 有 $v \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times (-T_0, t_0))$, 以及 v 在 $t = 0$ 有奇性。则有

$$\infty > \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \geqslant \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{-t}}, \quad -T_0 < \forall t < 0.$$

令 $M(t) = \sup_{-T_0 \leqslant s \leqslant t}\|v(s)\|_{L^\infty}(\mathbb{R}^3)$. 则存在一串点列 (r_k, z_k, t_k), 其中 $t_k \nearrow 0$ 使得 $M_k := |v(r_k, z_k, t_k)| \geqslant \frac{k}{k+1}M(t_k)$. 由假设 $|v| \leqslant \frac{C_*}{r}$, 我们有 $r_k \leqslant C_*/M_k$. 令

$$v^{(k)}(r,z,t) = \frac{1}{M_k}v\left(\frac{r}{M_k}, z_k + \frac{z}{M_k}, t_k + \frac{t}{M_k^2}\right).$$

它们是 $\mathbb{R}^3 \times (-\frac{M_k^2 T_0}{2}, 0]$ 中的轴对称温和解，满足

$$\left|v^{(k)}\right| \leqslant \min\left(\frac{k+1}{k}, \frac{C_*}{r}\right) \quad \text{and} \quad \left|v^{(k)}\left(M_k r_k, 0, 0\right)\right| = 1.$$

由 L^∞ 温和解的正则性知当 k 足够大时所有导数都是有界的：

$$\left\|\nabla_x^l \partial_t^m v^{(k)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times (-T,0))} \leqslant C(l,m,T), \quad \forall l,m,T \in \mathbb{N}. \tag{1.40}$$

由上述的估计，我们知存在子列 $v^{(k_j)}$ 收敛到 D 上一个轴对称温和古代解 $\bar{v}$ 且满足

$$|\bar{v}| \leqslant \min\left(1, \frac{C_*}{r}\right) \quad \text{in } D \quad \text{and} \quad |\bar{v}(\bar{r}, 0, 0)| = 1,$$

其中 $\bar{r} = \lim_{j\to\infty} M_k r_{k_j} \leqslant C_*$. 由Liouville定理（定理1.11）知 $\bar{v} \equiv 0$, 与 $|\bar{v}(\bar{r}, 0, 0)| = 1$. □

定理1.11的证明参见[1, 第208-209页].

§1.5 总结

定理1.7还可以有另外一种证明，详细内容请参见[1].本报告主要依据[1]写成，重点叙述了利用De Giorgi-Nash-Moser迭代的办法证明定理1.7，其余部分简略做了一些叙述。限于时间和篇幅，在此不能一一详细地叙述整个理论架构，希望在以后的学习中能够将这一块补足。Navier-Stokes方程的相关理论在当今偏微分方程研究中有着举足轻重的地位，也是实际应用中很有用的一块内容，十分值得我们去努力学习，并为之发展贡献自己的力量。Navier-Stokes的千禧年问题一直以来备受大家关注，也希望在我的有生之年可以看到这一重大问题有所突破。课程到此也接近了尾声，很庆幸能有这次机会感受这一领域的魅力，也十分感谢授课老师章志飞教授的辛勤讲授。

参考文献

[1] Tsai T P. Lectures on Navier-Stokes equations[M]. American Mathematical Soc., 2018.

[2] Chiun-Chuan Chen, Robert M. Strain, Tai-Peng Tsai, and Horng-Tzer Yau,*Lower bound on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008), no. 9, Art. ID rnn016, 31.

[3] Chiun-Chuan Chen, Robert M. Strain, Tai-Peng Tsai, and Horng-Tzer Yau,*Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations. II*, Comm. Partial Differential Equations 34 (2009), no. 1-3, 203-232.

[4] Gabriel Koch, Nikolai Nadirashvili, Gregory Seregin, and Vladimir *Šverák*, *Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications*, Acta Math. 203 (2009), no. 1, 83-105.

[5] Eric A. Carlen and Michael Loss, *Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation*, A celebration of John F. Nash, Jr., Duke Math. J. 81 (1995), no. 1, 135 – 157 (1996).