202109-202201 第02周习题课建议内容

1. 第一周作业题简要讲解.

2. (1) “函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的周期函数”的肯定语气叙述.

   (2) “函数$f(x)$在(a,b)无下界”的肯定语气叙述.

3. 设$f(x)$和$g(x)$是定义在D上的有界非负函数,证明：

$$\inf_{x\in D} f(x)\inf_{x\in D} g(x)\leqslant \inf_{x\in D}[f(x)g(x)]\leqslant \sup_{x\in D} f(x)\inf_{x\in D} g(x).$$

4. 【命题】有限个可数集的并集是可数集; 可数个可数集的并集是可数集.

   【定义】代数数和超越数的概念. 证明：代数数全体是可数集.

5. 证明$f(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}x,\quad x\in\mathbb{R}$ 不是周期函数.

6. 设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的单调递增函数, 满足$f(a)\geqslant a,\quad f(b)\leqslant b$. 证明：$\exists x_0\in[a,b],\quad s.t.\ \ f(x_0)=x_0$.

7. 是否存在以所有有理数为周期而不以任何无理数为周期的函数？若有, 给出例子; 若无, 给出理由.

   是否存在以所有无理数为周期而不以任何有理数为周期的函数？若有, 给出例子; 若无, 给出理由.

202109-202201 第03周习题课建议内容

1. 第02周作业题简要讲解.
2. 若两数列x_n, y_n都发散, 是否$x_n y_n$和$x_n + y_n$也发散?
3. 计算极限$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
4. 已知$x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$发散, 用极限的定义证明$y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ 发散.
5. 已知$e^x \geqslant 1+x,\quad \forall x > 0$. 证明 $\dfrac{\ln n}{n^\alpha} = o(1),\quad (n\to\infty)$, 其中$\alpha > 0$是常数.
6. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+3+\cdots+n} = a$.
7. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 试证:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n} = a,$$
其中$p_k > 0$而且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n} = 0$.
8. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = ab$.
9. 设$a_n > 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$. 利用几何-算术平均不等式证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$.
10. 迭代数列定义为$a_{n+1} = 2a_n - a_n^2$, 初值 $a_0\in\mathbb{R}$给定. 试根据a_0的取值范围, 讨论数列a_n的敛散性及极限值.

202109-202201 第05周习题课建议内容

1. 第03周作业题简要讲解.

2. 设$\{a_n\}$单调增加, $\{b_n\}$单调下降, 且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$都存在且相等.

3. 证明：收敛数列必有一项等于其上确界或者下确界.(收敛数列必达到其上确界或下确界.)

4. 利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} = e$.

5. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$.

6. 设$x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7. 设x_n是方程$\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = 1$在区间$[0,1]$上的解(以后可以证明, 对每一个自然数$n$, 这样的解是唯一的, 目前先认可该结论.) 证明数列$\{x_n\}$收敛并求其值.

8. 设$x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 8}{6}$, 讨论$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$的存在性和取值.【可以先使用蛛网法预测结果, 然后证明之.】

9. 用Stolz定理证明如下两个结论:
   (1)如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ∃且$= a$.
   (2)如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$∃ 且 $= a$.

10. 使用Stolz定理证明: 设$a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$.
    然后计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

202109-202201 第06周习题课建议内容

1. 前一周作业题简要讲解.

2. 设$x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $n = 1, 2, \cdots, x_1 \in (0, 1)$. 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$.

3. 设$x_1 = 3$, $x_{n+1} = 3 + \dfrac{4}{x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明$\{x_n\}$收敛并求其极限.

4. 证明数列$x_0 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$收敛, 并求其极限.

5. 设$a_1 = \alpha$, $b_1 = \beta$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_n}{2}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 证明$\{a_n\}$, $\{b_n\}$都收敛且极限相等.

6. 讨论数列$x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k \ln k}$, $n = 2, 3, 4, \cdots$的敛散性.

7. 若存在常数$C > 0$, 使得对任意的$n \in \mathbb{N}$ 都有$\sum\limits_{k=1}^{n} |x_{k+1} - x_k| < C$. 则称$\{x_n\}$ 为有界变差数列. 证明：有界变差数列必是收敛数列. 试给出一个收敛而非有界变差的数列的例子.

8. 证明: 任意实数数列都具有单调递增或者单调递减的子列.

9. (1)证明：对实数集, 聚点的聚点还是聚点.
(2)构造一个实数集E, 使得E的聚点集恰好是$\{\dfrac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\} \bigcup \{0\}$.

202109-202201 第07周习题课建议内容

1. 前一周作业题简要讲解.

2. 设$x_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \geqslant 1$.

3. 设$\{x_n\}$有界, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n} + 2x_n) = 1$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在并求其值.

4. 证明: 若$x_n > 0$且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{x_n} = 1$, 则序列$\{x_n\}$是收敛的.

5. 设$x_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. 证明: 若对任意的数列$\{y_n\}$都有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

6. 对非负有界序列$\{x_n\}$证明: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n)^2 = (\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n)^2$.

7. 证明: 若非负有界序列$\{x_n\}$对任何序列$\{y_n\}$都有下列等式之一成立:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

则序列$\{x_n\}$收敛.

8. 设对数列$\{a_n\}$有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} = A$, 证明: 对任意固定的正整数$k$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_{n+k}|} = A$.

9. 设$a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, 证明$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{a_n} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\ell^n} = 0, \quad \forall \ell > 1$.

10. 设$a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, 证明$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

11. 设$a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{a_n} = 1$, 证明$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} = 1$.

12. 设$a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k < +\infty$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.

202109-202201 第08周习题课建议内容

1. 前一周作业题简要讲解.

2. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, 其中, $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$是常数.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{2k-1}{n^2}x\right)$, 其中$x\mathbb{R}$是常数.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1x+b}{a_2x+b}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中$a_1>0,a_2>0,b\in\mathbb{R}$是常数.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[xf(x)]}{x}$, 其中$[\cdot]$表示Gauss取整, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$;

3. 对给定的n个正数$a_1,a_2,\cdots,a_n$, 定义函数$f(x)=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}$, $x\neq 0$. 证明：
(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\max\{a_1,\cdots,a_n\}$; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\min\{a_1,\cdots,a_n\}$.

4. 设$f(x),g(x)$是$\mathbb{R}$上的周期函数, 满足$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$.
试证: $f(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5. 设$f(x)$在(a,b)内无界, 证明: 存在点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(a,b)$ $s.t.$ $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.

6. 设$f(x)$在$(0,1)$定义, 且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=0$. 证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

7. 设$f(x),g(x)$在$(a,+\infty)$上定义, $g(x)$单调上升, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(f(x))=+\infty$.
求证$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

8. 设$f(x)\in C(0,+\infty)$满足$f(x^2)=f(x)$, $(x>0)$. 求证: $f(x)\equiv const.$ $(x>0)$.

9. 设$f(x)>0$为$(0,+\infty)$上的单增函数, 且满足$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$,
证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$, $\forall a\in(0,+\infty)$.

10. 设函数$f(x)$定义在$\mathbb{R}$上, 在$x=0$的某个邻域内有界, 且存在常数$a>1,b>1$使得$f(ax)=bf(x)$, 证明$f(x)$在$x=0$点连续.

11. 设有界函数$f(x)\in C[0,+\infty)$, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在.
证明: $\exists t\in\mathbb{R}$ $s.t.$ $f(x)=t$在$[0,+\infty)$上有无穷多个解.

202109-202201 第09周习题课建议内容

1. 前一周作业题简要讲解.

2. 设$I, J \subset \mathbb{R}$是两个区间, $f: I \mapsto J$ 和 $g: J \mapsto \mathbb{R}$都是一致连续函数, 证明$g(f(x))$是I上一致连续函数.

3. 设$f(x) \in C(\mathbb{R})$, $g(x)$在$\mathbb{R}$上一致连续且有界, 证明$f(g(x))$在$\mathbb{R}$上一致连续.

4. 讨论下列函数的一致连续性:

(1) $f(x) = \cos\ x^p,\quad p > 0,\ x \in (0, +\infty);$

(2) $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x},\quad x \in (1, +\infty);$

(3) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x},\quad x \in (0, +\infty);$

(4) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x},\quad x \in (0, 1);$

(5) $f(x) = \ln x,\quad x \in (0, +\infty);$

5. 设$f(x)$在$[0, +\infty)$上一致连续, 且对任意的$h > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(nh)\ \exists$, 证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ \exists$.

6. 设$f(x)$在$[0, +\infty)$一致连续, 且对任意的$x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = 0$, 证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

7. 设I为有限区间, $f(x)$为定义在I上的函数. 证明: $f(x)$在I上一致连续的充要条件是$f(x)$把I上的Cauchy列映成Cauchy列.

8. 设$f(x)$为定义在区间(a, b)上的函数, 令$\omega_f(\delta) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \in (a,b) \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|$. 试证: $f(x)$在(a, b)上一致连续的充要条件是$\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

9. 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上一致连续, 证明: $\exists a > 0, b > 0\ \ s.t.\ \ |f(x)| \leqslant a|x| + b,\quad x \in \mathbb{R}$.

202109-202201 第11周习题课建议内容

1. 设$f(x)$在x_0的某个邻域有定义.
(1)如果$f'(x_0)$存在, 证明$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$.
(2)如果$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$存在, 是否$f'(x_0)$存在?

2. 设可微函数$f(x)$满足: $f(x)\geqslant x, f(x)\geqslant 1-x,\ x\in\mathbb{R}$. 证明$f(\dfrac{1}{2})>\dfrac{1}{2}$.

3. 若函数$f(x)$在(a,b)上满足$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha,\quad \forall x,y\in(a,b)$, 其中$M>0,\alpha>1$是常数, 证明$f(x)=const.,\quad x\in(a,b)$.

4. 设$f(x)$可导, 证明: $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$在$x=0$可导的充要条件是$f(0)=0$.

5. 设函数$f(x)$在$x=a$点连续, 且$f(a)\neq 0$, $f^2(x)$在$x=a$点可导, 求证$f(x)$在$x=a$点也可导.

6. 设$g(x)=xf(x),\quad x\in\mathbb{R}$. 求证：若$g'(x_0)\ (x_0\neq 0)$存在, 则$f'(x_0)$也存在.

7. 求函数$f(x)=x^{\sin(\sin(x^x))}$的导数.

8. 对函数$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 证明: $f^{(n)}(0)=0,\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

9. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x(t)=2t+|t|\\ y(t)=t^2+2t|t|\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$确定, 证明$y(x)$在$x=0$处可导, 并求出$y'(0)$的值.

10. 求方程$y^2+2\ln y=x^4$所确定的函数$y=f(x)$的二阶导数.

11. 证明函数$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ n阶可导, 但不是$n+1$阶可导.

12. 设$x^2y^2+x^2+y^2=1,\quad (xy>0)$. 证明$\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}=0$.

13. 证明$[0,1]$区间上的Riemann函数处处不可导.

202109-202201 第12周习题课建议内容

1. 设$f(x)\in C[x_1,x_2],D(x_1,x_2),x_1>0$, 证明: $\exists\xi\in(x_1,x_2)\ \ s.t.\ \ \dfrac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

2. 设$f(x)\in D(a,b),\ b<+\infty,\ \lim\limits_{x\to b-0}f(x)=+\infty$, 证明: $\varlimsup\limits_{x\to b-0}f'(x)=+\infty$.

3. 设非线性函数$f(x)\in C[a,b],D(a,b)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)\ \ s.t.\ \ f'(\xi)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. 设$f(x)\in C[a,b],\ \in D(a,c),\ \in D(c,b)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)\ \ s.t.\ \ |f(b)-f(a)|\leqslant(b-a)|f'(\xi)|$.

5. 设$f(x)\in D[a,b],\ f(a)=f(b)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)\ \ s.t.\ \ f(a)-f(\xi)=\dfrac{\xi f'(\xi)}{2}$.

6. 设$f'(x)\in D[0,+\infty),\ \ f(0)=0$, 证明:
$\forall x>0,\ \ \exists\xi\in(0,x)\ \ s.t.\ \ f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=\xi f''(\xi)$.

7. 设$f(x)\in D(a,b)$, 证明: $\forall x_0\in(a,b),\ \ \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(a,b)\ \ s.t.\ \ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=f'(x_0)$.

8. 设$f(x)\in C[0,1],D(0,1),\ |f'(x)|<1,\ x\in(0,1);\ f(0)=f(1)$. 证明: $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2},\ \ \forall x_1,x_2\in(0,1)$.

9. 设非常值函数$f(x)\in C[0,1],D(0,1),\ f(0)=0$. 证明: $\exists\xi\in(0,1)\ \ s.t.\ \ f(\xi)f'(\xi)>0$.

10. 【单侧导数的Rolle定理】设$f(x)\in C[a,b],\ f(a)=f(b),\ \ f'_+(x)$在$[a,b)$存在, 证明: $\exists c,d\in[a,b)\ \ s.t.\ \ f'_+(c)\leqslant0,\ \ f'_+(d)\geqslant0$.

11. 【单侧导数的Lagrange定理】设$f(x)\in C[a,b],\ \ f'_+(x)$在$[a,b)$存在, 证明: $\exists c,d\in[a,b)\ \ s.t.\ \ f'_+(c)\leqslant\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_+(d)$.

12. 设$f(x),f'_+(x)\in C(\mathbb{R})$, 证明 $f(x)\in D(\mathbb{R})$.

202109-202201 第13周习题课建议内容

1. 计算下列极限:

   (1) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$;

   (2) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{x^x-1}$;

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[(1+\dfrac{m}{n})^k-(1+\dfrac{k}{n})^m\right],\quad m,n,k\in\mathbb{N}.$

2. 设$f'(x)\in D[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=2$. 证明 $\inf\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\leqslant -16$.

3. 设$f'(x)\in D[0,1]$, $f(0)=f'(0)=0$, $|f''(x)|\leqslant|f(x)|+|f'(x)|$, $\forall x\in(-1,1)$. 证明: $\exists\delta>0\ \ s.t.\ \ f(x)=0,\ \ \forall x\in(-\delta,\delta)$.

4. 设有界函数$f(x)\in C^2(\mathbb{R})$, 证明: $\exists\xi\in\mathbb{R}\ \ s.t.\ \ f''(\xi)=0$.

5. 设$f(x)\in C^n(\mathbb{R})$, 且存在常数M_0,M_1使得 $|f(x)|\leqslant M_0$, $|f^{(n)}(x)|\leqslant M_1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 证明$\exists M>0\ \ s.t.\ \ |f^{(j)}(x)|\leqslant M$, $j=1,\cdots,n-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

6. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有界且$f'(x)$于$(-\infty,+\infty)$一致连续, 证明$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$有界.

7. 设$f(x)\in C^3(\mathbb{R})$, 且$\exists\theta\in(0,1)\ \ s.t.\ \ f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$, $\forall h\in\mathbb{R}$. 证明$f(x)$是一次或二次函数.

202109-202201 第14周习题课建议内容

1. 设$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)二阶可导, 且$|f''(x)| \geqslant m > 0$, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \geqslant \dfrac{m}{8}(b-a)^2$.

2. 设$P(x)$是多项式, 证明：
(1)若$p(x)+p'(x) \geqslant 0,\quad x \in \mathbb{R}$, 则$p(x) \geqslant 0$;
(2)若$p(x)-p'(x) \geqslant 0,\quad x \in \mathbb{R}$, 则$p(x) \geqslant 0$;
(3)若$p'''(x)-p''(x)-p'(x)+p(x) \geqslant 0,\quad x \in \mathbb{R}$, 则$p(x) \geqslant 0$.

3. 设$-\infty < a < b < +\infty$, $f(x)$于(a,b)凸且有界, 证明: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$都存在.

4. 设$f(x)$于(a,b)凸, 证明: 对任何$[c,d] \subset (a,b)$, $f(x)$于$[c,d]$Lipschitz连续.

5. 证明凸函数的不可导点可数.

6. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$;

(3) $\displaystyle I = \int \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x,\quad J = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$;

202109-202201 第15周习题课建议内容

1. 设$f(x)\in D(\mathbb{R})$, $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. 求$f(x)$.

2. 设$F(x)$是$f(x)$在$(0,+\infty)$上的一个原函数, 且$F(1)=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$, $f(x)F(x)=\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$, $\forall x\in(0,+\infty)$. 求$f(x)$.

3. 计算下列积分

(1) $\displaystyle\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln(3x+7)}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^8)}$;

(6) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}}$;

(7) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$;

(9) $\displaystyle\int\frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\,\mathrm{d}x$.

(11) $\displaystyle\int\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-10e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$;

(13*) $\displaystyle\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$;

(14*) $\displaystyle\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$;

(15*) $\displaystyle\int x^2e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$;

(16*) $\displaystyle\int\frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(17*) $\displaystyle\int\frac{(1+x)\,\mathrm{d}x}{x^2e^x(1+xe^x)}$;

(18*) $\displaystyle\int\frac{x^2\sin^2 x}{(x+\sin x\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$;

(19*) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x$;